RED BUILDING TEAM

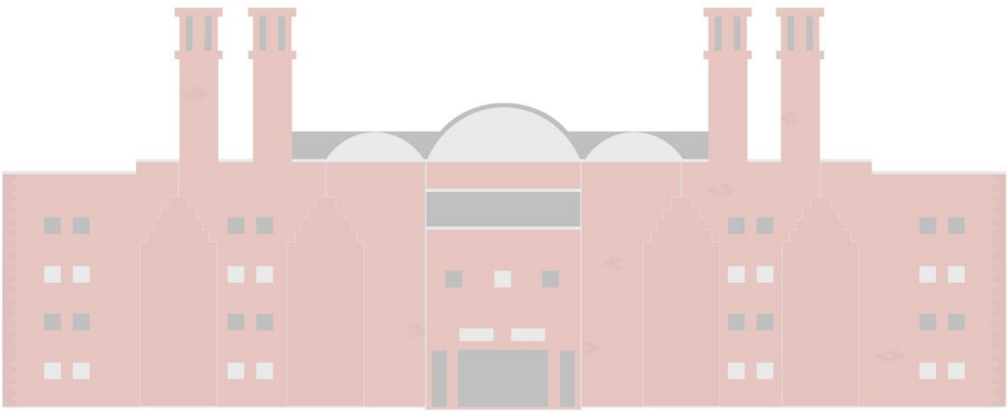
قسم هندسة الحواسيب والأتمتة

السنة الثانية / الفصل الأول

التحَليل الرياضِي ٣

المحاضرة التاسعة

8 صفحات



الدكتور: معاذ عبد المجيد

التاريخ: 2014/10/19

مثال: عين في المستوي العقدي المجموعات النقطية التالية:

$1.\frac{||z-2||}{||z+2||}=1$

الحل:

$$||z-2||=||z+2|| \Rightarrow$$

$$||(x-2)+iy||=||(x+2)+iy|| \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{(x+2)^2+y^2} \Rightarrow$$

$$x^2-4x+4+y^2=x^2+4x+4+y^2 \Rightarrow$$

$$-4x=4x \Rightarrow 8x=0 \Rightarrow x=0$$

المعادلة تمثل المحور oy

==

$2.\frac{||z+1||}{||z-2||}>\frac{3}{2}$

الحل :

$$||z+1||^2>\frac{9}{4}||z-2||^2$$

$$(x+1)^2+y^2>\frac{9}{4}[(x-2)^2+y^2]$$

$$x^2+2x+1+y^2-\frac{9}{4}x^2+9x-9-\frac{9}{4}y^2>0$$

$$-5x^2+44x-5y^2-32>0$$

$$-5\left(x^2-\frac{44}{5}x+\frac{484}{25}\right)-5y^2>32-\frac{484}{5}$$

$$\left(x-\frac{22}{5}\right)^2+y^2<-\frac{32}{5}+\frac{484}{25}$$

$$\left(x-\frac{22}{5}\right)^2+y^2<\frac{324}{25}$$

و هي معادلة قرص دائري مفتوح مركزه $\left(\frac{22}{5},0\right)$ ونصف قطره $\frac{18}{5}$.



==

3. $\left||z-2|\right| \left||z+2|\right|=4$

الحل:

$$\left||(x-2)+iy|\right| \left||(x+2)+iy|\right|=4$$

$$[(x-2)^2+y^2][(x+2)^2+y^2]=16$$

$$(x-2)^2(x+2)^2+y^2(x-2)^2+y^2(x+2)^2+y^4=16$$

$$(x^2-4x+4)(x^2+4x+4)+y^2(x^2-4x+4)+y^2(x^2+4x+4)+y^4=16$$

$$x^4+4x^3+4x^2-4x^3-16x^2-16x+4x^2+16x+16+y^2(2x^2+8)+y^4=16$$

$$x^4-8x^2+y^2(2x^2+8)+y^4=0$$

$$x^4-8x^2+16+2x^2y^2+8y^2+y^4=0$$

$$(x^2+y^2)^2-8x^2+8y^2=0$$

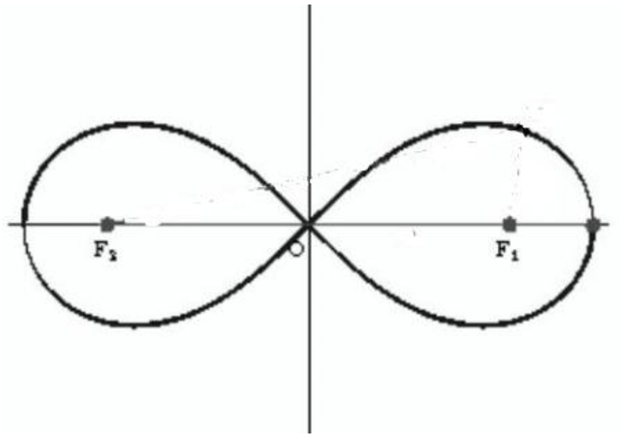
بالانتقال الى الاحداثيات القطبية

$$\rho^4 - 8\rho^2 \cos^2\theta + 8\rho^2 \sin^2\theta = 0$$

$$\rho^4 - 8\rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$$

$$\rho^2 = 8\cos 2\theta$$

وهي معادلة منحني ليمنسكات برنولي



==

ملاحظة: التابع متعدد الفروع هو مجموعه من توابع وحيدة الفروع.

التابع العكسي:

إذا كان التابع $w = f(z)$ وأمكن إيجاد z بدلالة w يسمى هذا التابع بالتابع العكسي.

إذا كان f تقابل فإن f^{-1} تابع وحيد القيمة.

إذا كان f غامر فقط فإن f^{-1} تابع متعدد القيم.

نهاية تابع عقدي :

نقول أن العدد w_0 هو نهاية التابع $w = f(z)$ عندما تسعى z إلى z_0 أي:

$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ إذا كان f معرف في جوار z_0 وكانت قيم f قريبة من العدد w_0 عندما تقترب قيم z من z_0.

مبرهنة(١): تنطبق جميع خواص النهايات للأعداد الحقيقة(جمع، طرح، قسمة...) على نهايات الأعداد العقدية باستثناء حالات عدم التعيين.

مبرهنة(٢): إذا كانت نهاية التابع موجودة فهي وحيدة.

مبرهنة(٣): الشرط اللازم والكافي كي يكون العدد $w_0 = u_0 + i\, v_0$ نهاية للتابع $f =$ $u + i\, v$ عندما $z \to z_0$ هو شرط وجود النهايتين :

$$u_0 = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) \quad , \quad v_0 = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)$$

مثال :

أثبت عدم وجود النهاية $\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}$:

الحل:

z تسعى إلى o عبر المحور الحقيقي $\Leftarrow$

$$(y=0) \Leftrightarrow z = x\,, \bar{z} = x$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$$

z تسعى إلى o عبر المحور التخيلي$\Leftarrow$

$$x = 0 \Leftrightarrow z = iy\,, \bar{z} = -iy$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z} = \lim_{iy\to 0} -\frac{iy}{iy} = -1$$

النهايتين مختلفتين فبالتالي لا يوجد نهاية للتابع.

ملاحظة لحل التمارين: يكفي لنفي قضية رياضية اعطاء مثال و لإثبات صحة قضية رياضية تحتاج لبرهان حصراً.

استمرار تابع عقدي :

يكون f مستمر عند z_0 عندما يكون:

١. $f(z_0)$ موجود (أي f معرف على z_0).

٢. $f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)$

نقول أن f مستمر على منطقة D عندما يكون مستمر عند كل نقطة فيها.

ملاحظة: تنطبق جميع خواص الاستمرار للأعداد الحقيقة (جمع، طرح، قسمة...) على الأعداد العقدية.

مبرهنة:

الشرط الازم والكافي لكي يكون $f(z) = u + iv$ مستمر عند $z_0 = (x_0, y_0)$ هو أن يكون $u(x,y)$ و $v(x,y)$ مستمران عند (x_0, y_0).

اشتقاق تابع عقدي :

يكون التابع العقدي قابل للاشتقاق إذا وجدت النهاية $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}$ ويكون:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$
$$= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

الاشتقاق = $\frac{\text{تغيير التابع}}{\text{تغيير المتحول}}$

إذا وجدت هذه النهاية بغض النظر عن الطريق المسلوك نقول أن f قابل للاشتقاق عند z_0.

ملاحظة: إذا كان f قابل للاشتقاق عند نقطة ما فإنه مستمر عندها بينما العكس غير صحيح بالضرورة.

مثال:

أثبت أن التابع $\boldsymbol{f(z) = \bar{z}}$ غير قابل للاشتقاق مع أنه مستمر دوما... (قسمه الحقيقي مستمر وقسمه التخيلي مستمر)

الحل:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{(z+\Delta z)} - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\bar{z} + \overline{\Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

وهذه النهاية غير موجودة(كما وجدنا في مثال سابق) بالتالي f ليس له مشتق .

مثال :

أوجد مشتق التابع $\boldsymbol{f = z^2}$

الحل:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z\,)^2 - z^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z^2 + 2z.\Delta z + \Delta z^2 - z^2)}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} (2z + \Delta z) \ = 2z$$

التوابع التحليلية *Analytic functions* :

نسمي f تابع تحليلي على المنطقة D إذا كان وحيد القيمة و قابل للاشتقاق على كامل المجموعة ، ويكون f تحليلي عند z_0 إذا كان تحليلياً في جوار z_0.

ملاحظة: لا يكفي أن تكون u ,v قابلين للاشتقاق عند اي نقطة حتى يكون f=u + iv قابل للاشتقاق عندها.

مبرهنة اللزوم:

ليكن $f(z) = u + iv$ تحليلي ومعرف ومستمر وقابل للاشتقاق في جوار $z_0 = x_0 + iy_0 \Leftarrow \grave{u}_x, \grave{u}_y, \grave{v}_x, \grave{v}_y$ موجودة عند z_0 وتحقق معادلتي كوشي _ريمان

$$\text{" Couchy – rieman "}\{\grave{u}_x = \grave{v}_y \,, \grave{u}_y = \grave{v}_x\}$$

نتيجة : أذا كان f تحليلي على المنطقة D فإن المشتقات الجزئية الأولى لـ v و u موجودة وتحقق معادلتي كوشي_ريمان .

مبرهنة الكفاية :

إذا كان $\grave{u}_x, \grave{u}_y, \grave{v}_x, \grave{v}_y$ مشتقات جزئية من المرتبة الأولى مستمرة في المنطقة D وتحقق معادلتي كوشي_ريمان في D فإن $f = u + iv$ تحليلي في D ويعطى مشتقه بإحدى العبارات التالية :

$$1_\, f'(z) = \grave{u}_x + i\grave{v}_x$$
$$2_\, f(z) = \grave{v}_y + i\grave{v}_x$$
$$3_\, f'(z) = \grave{u}_x - i\grave{u}_y$$

مثال:

أثبت أن $f(z) = \bar{z}$ ليس تحليلياً .

$$u = x \,, v = -y$$
$$\grave{u}_x = 1 \neq \grave{v}_y = -1$$

لم تحقق مبرهنة كوشي_ريمان بالتالي f ليس تحليلياً.

مبرهنة: إذا كان f تحليلي على D فإن مشتقاته من جميع المراتب تحليلية .

معدلات كوشي_ريمان في القطبية:

$$\grave{u}_\rho = \frac{1}{\rho}\grave{v}_\theta \; , \; \grave{u_\theta} = -\rho\grave{v}_\rho$$

ملاحظة:

١. كل تابع فيه $\overline{Z}$ غير تحليلي.

٢. $f = ||z||$ غير تحليلي.

"قد يتقبل الكثيرون النصح، لكن الحكماء فقط هم الذين يستفيدون منه"